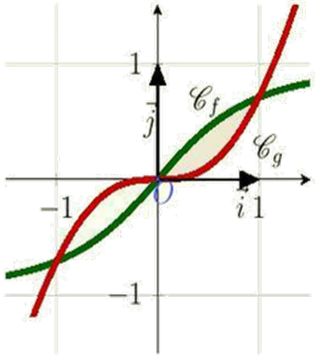
Exercice N°8

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2n+2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx$.

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+3} - \left(\dfrac{2n+2}{2n+3}\right) I_n$.

   c) Calculer I_1.



4. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.
   On a représenté ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en $(u.a)$ de la partie du plan limitée les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Calculer I_0.

$I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \longrightarrow \sqrt{u}$

$I_0 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$

$= \sqrt{2} - \sqrt{1}$

Donc $I_0 = \sqrt{2} - 1$